Title	逐次分析の問題について(マルチンゲールとその周辺)
Author(s)	高橋, 一
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 491: 114-134
Issue Date	1983-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/103531
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
491巻 1983年 114-134

逐次分析の問題について

富山大経済学部　高橋　一　(Hajime TAKAHASHI)

本稿では逐次分析のいくつかの問題を Martingale との関連において論じる。始めに逐次分析への動機づけを考察し第二節では歴史的な問題，Wald の Sequential Probability Ratio Test（以下 SPRT と記す）について論じる。第三節は Wald SPRT の問題点及その後の発展を　そして第四節では最近の話題を紹介する。

§1. 序.　　簡単のため本稿では以下の問題を考える。(Ω, $\mathcal{F}$) を可測空間．($\mathcal{F}_n$, $n \ge 1$) を単調増加な $\mathcal{F}$ の sub σ－加法族の列とする。$\mathcal{F}$ 上の確率測度を P_θ と書く，P_θ のもとで $X_1, X_2, \cdots$ は独立な平均 θ，分散 1 の正規分布，$N(\theta, 1)$ にしたがう確率変数列 (i.i.d. r.v.) とし以下 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $n \ge 1$，$S_0 = 0$ と書く。この時統計的仮説検定問題

(1)　　$H_0: \theta = 0$　　vs.　　$H_1: \theta \ne 0$

を考察する。標準的な検定方式は、あらかじめ定められた標本数Nと有意水準 $0 < \alpha_0 < 1/2$ に対して

(2) $$|S_N| > k\sqrt{N}$$

ならば H_0 を棄却して H_1 を採択する。ここで定数 k は

(3) $$P_0\{|S_N| > k\sqrt{N}\} = 2\{1 - \Phi(k)\} = \alpha_0,$$

Φ は標準正規分布の分布関数、により決められる。

一般にz−検定と呼ばれる上記検定法は、いわゆる尤度比検定で UMP invariant, unbiased 等いくつかの最適性を保持している。(Lehmann,(1959) CH 3〜6)。従って"無条件"にN個の標本が取れる場合、特に科学実験等に於いてz−検定及びその一般化であるt−検定は優れた方法といえる。ところが一方、実際に患者をつかい行う医学実験、又は迅速な決定が要求される、例ば戦時下に於ける品質管理等の場合状況は若干異ってくる。今仮りに X_i を i 番目の患者のある薬に対する反応とし、その結果は $i+1$ 番目の患者が実験に参入する前に得られるものとする。即ち $X_1, X_2, ---$ と逐次データが得られるものとする。ここでゼロ仮説 H_0 と対立仮説 H_1 に対し検定する時 もしも $|\theta|$ の値が非常に大きいならば多くの場合 N個すべてのデータを集める前に H_0 の非妥当性は明らかになるであろう。これは S_n の値が平均的に θn に等しい事より少くとも直観的には明らかであろう。(図1参照)

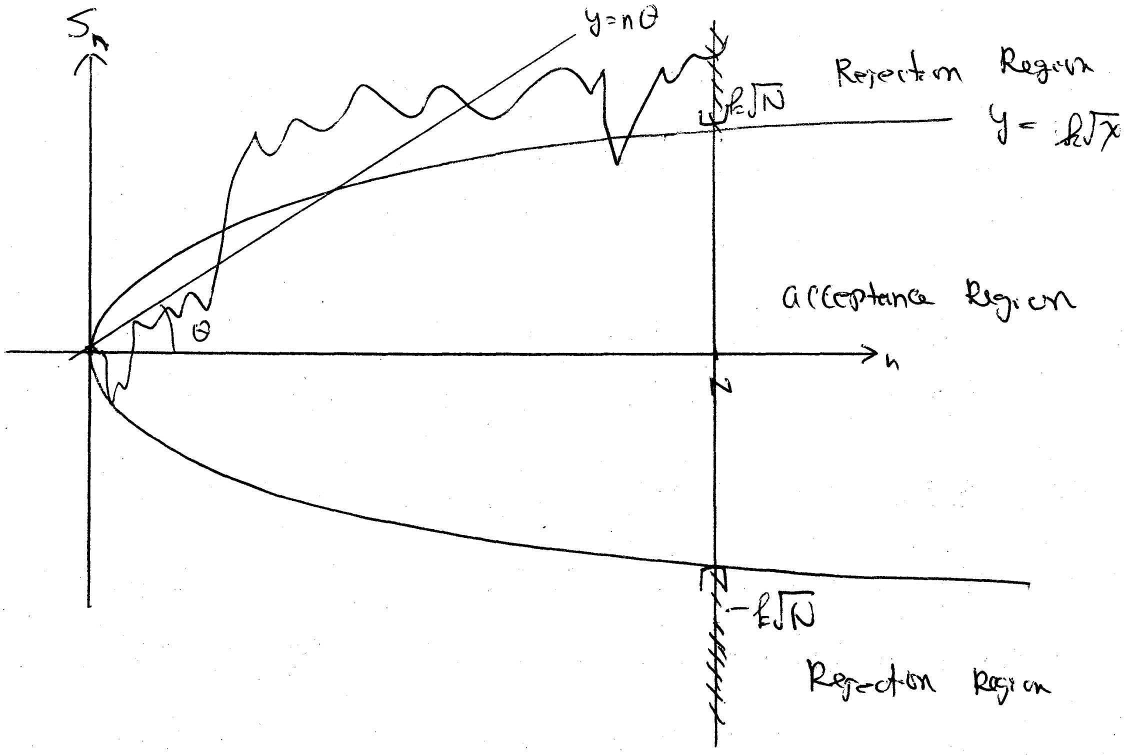


図 1.

ここでもしもサンプリングの初期の段階で H_0 の非妥当性が明らかになった時それ以上のサンプリングには (A)経済上又(B)倫理上の問題が生じる。一方N個の標本を全部取らない限り伝統的方法はその最適性を保持し得ないのである。数学的には第一種の過誤確率（$P\{\text{TYPE I}\}$）α_0 と標本数Nを所与として，第二種の過誤確率（$P\{\text{Type II}\}$）を最少にする決定方式を探すのが伝統的方法であった。一般に $P\{\text{Type II}\}$ は θ とNの関数で上の場合 $P\{\text{Type II}\}$ は $|\theta|$ とNに関して減少関数である。もしも α_1 を許容できる最大の $P\{\text{Type II}\}$ であるならば θ を固定した時Nを減らす事は可能であろう。即ち，α_0，α_1 を所与とした時，Nを（ここでは確率変数）.

最少にする様な決定方式を探すわけである。以上が逐次検定即ち，H_0を採択又は棄却するのに十分な情報が集まった所でサンプリングを中止する合理的方法への動機ずけである．より詳しくは Armitage (1975)，Wald (1947) そして Wallis (1980) 等を参照されたい。

§2. WALD SPRT. 本節では Wald (1947) により開発されたSPRTについて，出来うる限り直観的に（数学的には若干粗雑に）述べてゆく。前節と同様 $X_1, X_2, \cdots$ を $N(\theta, 1)$ よりの i.i.d. r.v. として単純ゼロ仮説，単純対立仮説の検定問題を考える。

(4) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$

ここで例えば $Y_i = X_i - \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1)$ と置くことにより，一般性を失うことなく $\theta_1 = -\theta_0 > 0$ と仮定できる。さてH_0が正しい時 S_nの値は $\theta_0 n$ にそい負となるであろう。したがって $a < 0 < b$ をある定数として停止時間（S.T.）tを

(5) $t = \inf\{n \geq 1 ; S_n \notin (a, b)\}$, $\inf\{\phi\} = \infty$

で定義して

$$S_t \leq a \Rightarrow H_0\text{を採択}$$

$$S_t \geq b \Rightarrow H_1\text{を採択}$$

なる検定方法を考えれば合理的と思われる。しかしながら以

下(A)～(D)の問題に対する答は必要である.

(A) $P_{\theta_i}\{\tau < \infty\} = 1 \quad i = 0, 1.$ 即ち確率1でサンプリングを終了するかどうか。

(B) 与えられた α_0, α_1,(第一種過誤確率, 第二種過誤確率の上限)を実現する a, b の選択が可能か否か又もしも可能ならばその決定方法。

(C) $E_{\theta_i}\{\tau\} = ? \quad i = 0, 1.$

(D) 最適性の定義とSPRTの最適性。

これらの問題を考えるための基本的な定理を述べる。

<u>定理 1.</u> (大数の強法則). $Y_1, Y_2, \cdots$ を平均 μ の i.i.d. r.v. $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \quad n \geq 1$ とする. この時

(6) $$n^{-1} S_n \xrightarrow{a.e} \mu \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

<u>定理 2.</u> (Fundamental Identity of Sequential Analysis) τ を任意の($\mathcal{F}_n$)停止時間. $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} ; [\tau = n] A \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}$ Q, P を $\mathcal{F}$ 上の確率測度で $Q^{(n)}$, $P^{(n)}$ はそれぞれの $\mathcal{F}_n$ への制限。さらにすべての n に対し $Q^{(n)}$ と $P^{(n)}$ は互いに絶対連続で $L_n = dQ^{(n)}/dP^{(n)}$ と書く. この時任意の $A \in \mathcal{F}_\tau$ に対し

(7) $$Q\{A[\tau < \infty]\} = \sum_{n=1}^{\infty} Q\{A[\tau = n]\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A[\tau=n]} [dQ^{(n)}/dP^{(n)}]\, dP = \int_{A[\tau<\infty]} L_\tau \, dP .$$

<u>定理 3.</u> (Wald Equation). $Y_1, Y_2, \cdots$ を平均 μ (有

限）の i.i.d r.v. $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0$ とする。
t を任意の $(\mathcal{F}_n)$ 停止時間で $E\{t\}$ が有限であると仮定する。
この時*

(8) $$E\{S_t\} = E\{t\} \cdot E\{Y_1\}.$$

定理1の証明及意味は至る所で論じられているのでここではふれない。定理2は L_n が P のもとで Martingale である事をもちい簡単に証明できる（Chow-Robbins-Siegmund, 1971. P 33）形式的には Q のもとでのある事象の確率を他の確率 P のもとで計算する方法である 証明及定理の平易さに比して、その意味する所は非常に大きい。定理3は逐次分析の中で最も重要かつ有名な定理でその一般化及各種の証明方法が出版されている（Feller, 1971, Chow-et all 1971, Chow-Teicher, 1978）もしも t が定数又は $Y_1, Y_2 \cdots$ と独立であれば (8) は自明である。多くの場合 (8) の証明には $\{t > n\}$ が $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \cdots$ と独立である事を利用する方法がとられている 定理中 モーメントについての条件は無限和の順序交換 正当化のため必要とされる。最も一般的な形での定理とその証明は Chow-Robbins-Teicher (1965) により Martingale をつかい行われている。

(*) $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$ と仮定しておく。

さて以下(A)〜(D)を考えてゆくが簡単のため $\alpha_0=\alpha_1=\alpha$ とする。

(A) 定理1より S_n は平均 に θn で近似される。又サンプリング領域は $y=a$ と $y=b$ で決定される上下に有界な領域故 $t<\infty$ a.e. (P_{θ_i} $i=0,1$) は明らかであろう。実際 Stein は ある $c>0$ と $0<\rho<1$ が存在して十分大きな n に対し

$$P_{\theta_i}\{t>n\}<c\rho^n \qquad i=0,1$$

なる事を証明した (Feller, 1971 P.601)。したがって任意の $\alpha>0$ に対し $E_{\theta_i}\{t^\alpha\}<\infty$ $i=0,1$ である。

(B) 定理2で $Q=P_{\theta_0}$, $P=P_{\theta_1}$ としさらに $A=\{S_t\ge b\}$ とおく。(A)より $P_{\theta_i}\{t<\infty\}=1$ 又 $L_n=\exp\{-2\theta_1 S_n\}$.

$$\alpha = P_{\theta_0}\{S_t\ge b\} = \int_{S_t\ge b} L_t\, dP_{\theta_1}$$
$$\le e^{-2\theta_1 b}P_{\theta_1}\{S_t\ge b\} = e^{-2\theta_1 b}\{1-\alpha\}$$

上式中不等式は $S_t\ge b$ より生ずる。ここで S_t によるオーバーシュート (overshoot) を無視し $S_t\simeq b$ とする事により

$$\alpha\simeq e^{-2\theta_1 b}/(1+e^{-2\theta_1 b})$$

又は $b\simeq \frac{1}{(2\theta_1)}\log\frac{\alpha}{1-\alpha} \doteq -a$, なる関係式を得る。

(C) 定理3と近似式

$$E_{\theta_i}\{S_t\} = bP_{\theta_i}\{S_t\ge b\} - bP_{\theta_i}\{S_t\le -b\} \quad i=0,1$$

より

$$E_{\theta_i}\{N\} \simeq (2\theta_i^2)^{-1}(2\alpha-1)\log(\alpha/1-\alpha) \quad i=0,1$$

特に

$$E_{\theta_i}\{N\} \sim -(\log\alpha)/2\theta_i^2 \qquad \alpha \downarrow 0$$

尚同じ P{Type I}, P{Type II} をもつような固定サンプル検定で必要とされるサンプル数は $-(2\log\alpha)/\theta_1^2$ でこれはSPRTのほぼ4倍にあたる

(B) まず最適性を"与えられた α_0, α_1 に対し P{Type I} ≤ α_0, P{Type II} ≤ α_1 を満たすすべての逐次検定方法の中で $E_{\theta_i}\{N\}$ を最小にするもの"と定義する。問題は Wald SPRT がこの意味で最適かどうかである。歴史的には Wald による予想 (Wald, 1947 P. 197) に始まり Wald-Wolfowitz (1948), Arrow-Blackwell-Girshick (1949) 等により与えられた証明の誤りを正す方向で発展してきた。この最適停止問題の理論は Chow-Robbins-Siegmund (1971) で一応の完結を見るが、その間逐次分析がMartingale の発展にはたした役割は大きい。やや直観的な証明は Lehmann (1959) CH3, Ferguson (1967) CH7 に又厳密な証明は Chow-Robbins-Siegmund, (1971) CH 4~5 に与えてある。以下 Martingale との関係を非常に粗ではあるが述べて行く。

δ_n を n番目の観測値を得たあとで決定を行う時生ずるであろう損失又 $c>0$ をサンプル一つを取る時に必要な費用とすると $W_n = \delta_n + cn \quad n=1,2,\cdots$ は

n時点でサンプリングを停止，決定を下した時の損失である．問題は $E\{W_n\}$ を最小にする様な ①各時点 n に於ける δ_n を最小にする決定方法の発見と ②しかるのち $E\{W_n\}$ を最小にする停止時間 t の発見にある。①については標準的な検定方法（尤度比検定，Bayes 検定）がその例である事が比較的容易に示される．②についてはまず δ_n，Cn はそれぞれ n についての減少関数，増加関数である．したがって，適当な条件下で δ_n は Super-martingale Cn は sub-martingale で近似されるであろう．所で n が小い時は δ_n が又大きい時は Cn がそれぞれ W_n で優性，即ち W_n は n が大きくなるにつれ Super martingal から Submartingale にその性格を変える．したがって $E\{W_n\}$ を最小にするには その変化点を探すような Adaptive な方法を見つければいいわけである。（cf. Backward induction）。

§3．SPRTの問題点とその後の発展．

前節では H_0 と H_1 が十分はなれている時，SPRTは $E\{t\}$ をそれら仮説のもとで最小にするという意味で最適であった．したがって真の状態が H_0 と H_1 の中間にある場合最適性について何んら保障はない。実際前節の問題で もしも $\theta = 0$ であると $H_0 : \theta = -\theta_1$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ に対する SPRT の停

止時間 τ は $E_0\{\tau\} \sim (\log\alpha)^2/4\theta_1^2$ as $\alpha \downarrow 0$ 即ち固定サンプル検定と比べ $(-\log\alpha)/8$ 倍ものサンプル数を(平均で)必要とする。この欠点を多少とも軽減するため Sobel & Wald (1949) は $H_{-1}: \theta = -\theta_1$ $H_0: \theta = 0$, $H_1: \theta = \theta_1$ なる"3-decision"問題を考え H_{-1} vs H_0 と H_0 vs H_1 に対応する2つのSPRTを組み合わせる事により $(-\theta_1, \theta_1)$ の区間内でもあまりサンプル数の大きくならない検定法を案出した.(図2)

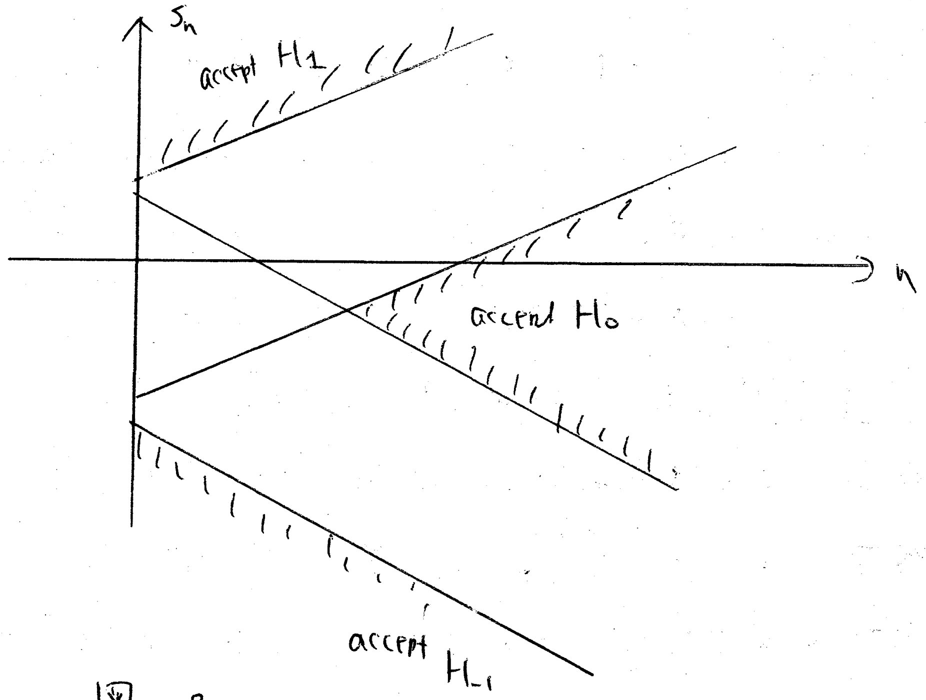


図 2

しかしながら応用上, τ が確率1で有界でない場合いくつかの不都合が生じる(例へば予算の問題)。即ち, 実際上はSPRTの様に開いた計画ではなく, 閉じた計画の方が望ましいとされている(Armitage, (1975))。その他, 複合仮説の問題等SPRTには多くの問題がある. 以下それらを論じて行く.

以下 1節で考えた $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta \neq 0$ を考える。この問題に対する閉じた逐次検定法としては Schneiderman & Armitage (1962), Anderson (1960), Cornfield (1966), Robbins (1970) 等数多くの研究があるがここでは以下の二つの研究を照介するにとどめる。

(A) Armitage の Repeated Significance Test. (以下 RST と書く)

これはある意味で一番自然な逐次検定と云える。即ち上で考えた Z－検定を各時点で行う検定方式である。今仮りに $n-1$ 時点までテストが中止されなかったとする。この時 X_n を観測し $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ を計算し もしも $|S_n| > k\sqrt{n}$ であればテストを中止して H_0 を棄却する ここで k は

$$P_0\left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} > k \right\} = 2[1 - \Phi(k)] = \alpha.$$

で決められる定数. もち論重複対数の法則により, たとえ H_0 が正しくとも確率 1 で $|S_n| > k\sqrt{n}$ なる事象はいずれ起こる, したがってこの検定法が意味を持つためには ある正数 N_0 をあらかじめ決めておいて, 時点 N_0 までに H_0 を棄却できるかどうかを問わなければ意味がない (Robbins, 1952)。以上をふまえ Armitage は次の検定法を提唱した. " $H_0: \theta = 0$ を $H_1: \theta \neq 0$ に対し検定するのに, ある定数 $a > 0$, $c \geq 0$ $N_0 \geq 0$ に対し 停止時間 t を

(9) $$t = \inf\{ n \geq 1 : |S_n| \geq \sqrt{2a(n+c)} \}$$

で定義する。ここで

(10) $$t \le N_0 \Rightarrow H_0\text{を棄却}$$
$$t > N_0 \Rightarrow H_0\text{を採択}$$

とする。これをArmitageのRSTと呼ぶ(Armitage 1975)。

(B) Bayes解. この問題に関するBayesian接近法はKiefer & Weiss (1957) 以後いくつかの結果があるがここではSchwarz (1962, 1968) による最適Bayes解のサンプリング領域の極限形状について述べてゆく。さて、

(11) $$\Lambda_n^0 = S_n^2/(2n), \quad \Lambda_n^1 = [(n\delta - S_n)^+]^2/(2n)$$

をそれぞれ

(12) $$H_0 : \theta = 0 \quad vs \quad H_1 : |\theta| \ge \delta .$$

を検定する尤度比とする。ここで $x^+ = \max\{0, x\}$, $\delta > 0$ は与えられた正定数((−δ, δ) をindifference regionと呼ぶ。Wald 1947, p134)。Schwarzの結果によればサンプリング領域の極限に於ける形は

(13) $$\max\{\Lambda_n^0, \Lambda_n^1\} \le \log\frac{1}{c} = a$$

で決まる。ここで c =(サンプル1つのコスト)/(誤った決定に対するコスト)で極限は $c \to 0$ の意味である。Schwartの検定法は①そのサポートが $|\theta| \ge \delta$ であるようなすべての先験確率分布に対しAsymptoticな意味でBayesである。そして②これはすべてのBayesian逐次検定に成り立っているが閉じた計画となっ

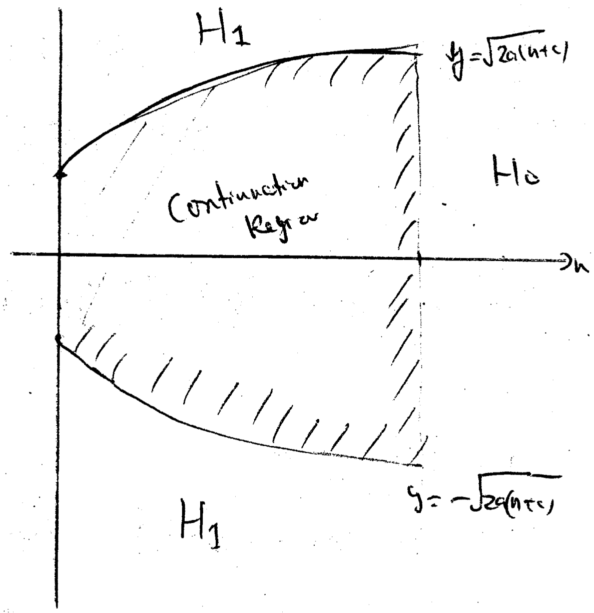
ている。応用上は若干の修正を加え サンプリング領域を

(14) $$\Lambda_n^{(i)} \le a_i \qquad i = 0, 1$$

とする。この時サンプリング領域は $(n, |S_n|)$ 空間では

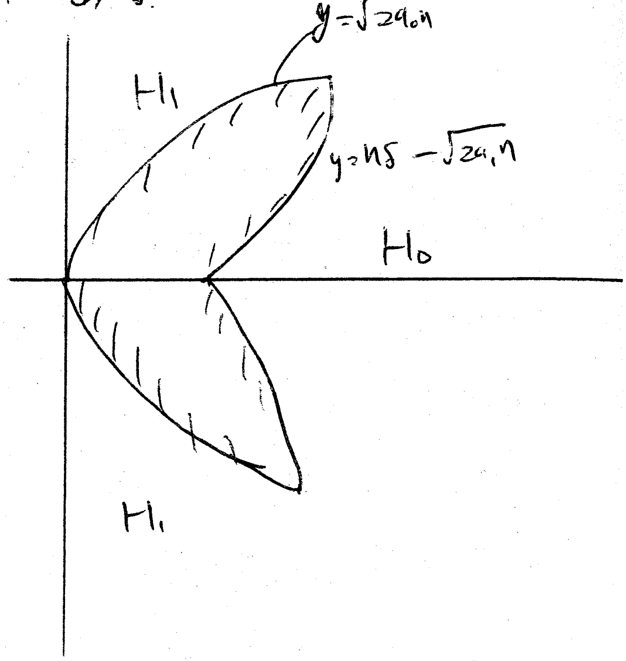
$$U: y = \sqrt{2a_0 n}, \qquad L: y = (nS - \sqrt{2a_1 n})^+$$

なる2つの曲線に挟まれる領域である。



RST

図 3



Schwarz test

図 4

以上の検定法で、RSTはその使いやすさ、又Schwarz検定はそのBayesian性によりともに優れた方法といえる。問題はそれらのFrequentist性質、即ち P{Type I}, P{Type II}, E{N} 等の計算が非常に難かしい事にあった。(したがって a, c, N_c 等のパラメターの選択がほぼ不可能であった)。若干異った検定法ではあるが、この問題を解くためAnderson (1960)

は S_n をBrown運動で近似しDoob(1949)の方法で数値解を求めた、又Schneiderman－Armitage(1962)はBrown運動で近似するため非常に複雑なサンプリング領域を考えている。さらにMcPherson & Armitage(1971)はRSTに於いて高速コンピューターを使う積分の数値計算を行い各種 a, c, N_0 のコンビネーションに対応する過誤確率，期待サンプル数の正確な値をもとめた.（想像を絶するCPU time）

これらの困難は最近のWoodroofe(1976a, b), Lai & Siegmund(1977, 1979)らによる非線型再帰理論の発展により大幅に解決された。即ち, RSTに於いては $a^{-1}N_0$ が有界な正数になる様に a と N を増やす時非常に正確な近似解をあたえている。ただ c の値が大きい時やSchwarz検定の場合数値的に若干問題があ．たがこれらもTakahashi & Woodroofe(1980, 1982)によりP(TypeI)の漸近展開があたえられより正確な近似が可能となってきている。いくつかの技術的問題はこの漸近展開にあらわれる定数の計算が非常に複雑な事にある．いくつかの場合（特にRSTにおいて）Siegmund(1977)はBrown運動を用い漸近展開の高次項を推定しているが机上計算機で計算出来る程簡単な定数を含むSiegmundの結果がいくつかの場合Woodroofe & Takahashi(1982)の近似を数値的に陵駕している。

より基本的な問題としては極限のとり方であろう．上での

議論は，H_0とH_1とを固定している。一方標本数が増えればH_0とH_1とを識別する力は強くなるであろう。したがって，この際より"近い仮説"の検定を考えるのが自然であろう。例へば $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: |\theta| \geq \delta_n$ で $\delta_n \to 0$ $n \to \infty$ なるもの（より厳密には Contiguous な仮説を考える）を考える。この時 Brown 運動による近似が数値的にも非常によい結果を与える事が Siegmund (1979) 5 により示されている。以下次節では，Brown運動による近似の重要性と又有限サンプルの場合よりより近似を得るため，最近の話題から Ferebee の Martingale について述べる。

§ 4 Brown 運動と Boundary Crossing 問題.

Brown運動がある境界を超える確率又は始めて超えるまでの平均時間を求めるのに今まで Doob (1947) を始め，Robbins + Siegmund (1970), (1973) Daniels (1982) 等数多くの方法が案出されているが，本節では RST 及 Schwarz 検定との関連において筆者が興味を持っている Ferebee (1982) の結果について簡単に述べて行く。

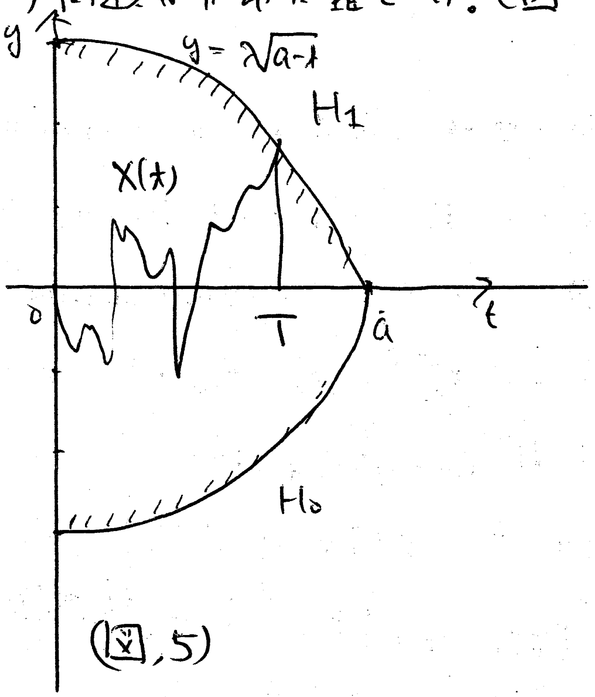
$X(t)$を$(0,0)$を出発点とする drift θ の Brown 運動とする。ここで

$$H_0: \theta \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta > 0$$

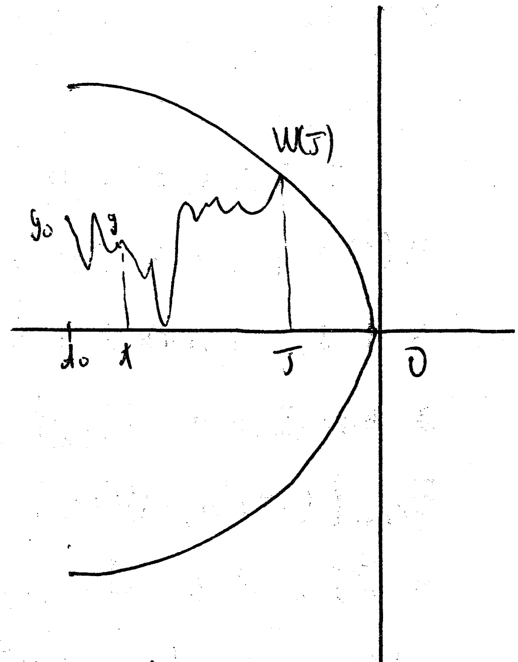
を検定するのに，停止時間

(15) $T=\inf\{t\ge 0 : |X(t)| = \lambda\sqrt{a-t}\}$ $\lambda>0$

を定義し "$X(T)\ge 0$ なる時, 又その時に限り H_0 を棄却する" という検定方式を考える。さて $P_\theta\{X(T)\ge 0\}$ $E_\theta\{T^n\}$ 等を考える時, T の定義式の非線型性及二境界性により問題は非常に難しい。(図 5)



(図, 5)



(図 6)

このために, まず $W(t)$ を (t_0, y_0), $(t_0<0)$, を出発する標準Brown運動. $P_{(t_0,y_0)}$ を上記 $W(t)$ に対応する確率測度. $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s) : t_0\le s\le t\}$ $t\le 0$. と書く。さて Z を標準正規確率変数, g を $E|g(\mu+\sigma Z)|<\infty$, $-\infty<\mu<\infty$, $\sigma>0$ なる可測関数として $G(\mu,\sigma)=E\{g(\mu+\sigma Z)\}$ と書く.

定理4. $t_0\le t\le 0$ なる t に対し $M(t)=G[W(t), \sqrt{-t}]$ とする. この時

$\{M(t), \mathcal{F}_t, t_0 \le t \le 0\}$ は $P_{(t_0, y_0)}$ に関して Martingale となる。

系. $k_n(x) = E\{(Z+x)^n\}$, $l_n(x) = E\{(Z+x)^n \operatorname{sgn}(Z+x)\}$ とする時 $(-t)^{\frac{n}{2}} k_n(W(t)/\sqrt{-t})$ 及 $(-t)^{\frac{n}{2}} l_n(W(t)/\sqrt{-t})$ は Martingale となる。

さて (t, y) を $|y| = \lambda\sqrt{-t}$ で定義されるパラボラの内点とし $W(t) = y$ なる条件のもとで $J = \inf\{s \ge t; |W(s)| = \lambda\sqrt{-s}\}$ とする。J は確率 1 で有界したがってOptimal Stopping 定理及上記系より $E_{(t,y)}\{-J^n\} = (-t)^n k_{2n}(\mu)/k_{2n}(\lambda)$, 又 $E_{(t,y)}\{(-J)^n \operatorname{sgn} W(J)\} = (-t)^n l_{2n}(\mu)/l_{2n}(\lambda)$ ここで $\mu = y/\sqrt{-t}$。さて $I_{[W(J)>0]} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} W(J))$ より

(16) $$E_{(t,y)}\{W^n(J) I_{[W(J)>0]}\} = \left(\frac{\lambda^n}{2}\right)(-t)^{\frac{n}{2}}\left[\frac{k_n(\mu)}{k_n(\lambda)} + \frac{l_n(\mu)}{l_n(\lambda)}\right]$$

を得る。以上 $\theta = 0$ 即ち Brown 運動の drift はゼロと仮定して議論を進めてきたが、一般の場合 §2 の定理 2 より

$$P_{(t,y),\theta}\{W(J) \ge 0\} = \int_{[W(J)>0]} dP^{(J)}_{(t,y),\theta} / dP^{(J)}_{(t,y),0} \, dP_{(t,y),0}$$

$$= E_{(t,y),0}\{I_{[W(J)>0]}[e^{W(J)\theta - J\theta^2/2} / e^{y\theta - t\theta^2/2}]\}.$$

一方 $$\exp\{W(J)\theta - J\theta^2/2\} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \lambda^{-n} k_n(\lambda)\, \theta^n W^n(J)$$

以上より

$$P_{(t,y),\theta}\{W(J) \geq 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\left\{-y\theta + \frac{t\theta^2}{2}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h_n(\lambda)\ell_n(\mu)}{\ell_n(\lambda)}\frac{(\theta\sqrt{t})^n}{n!}$$

参考文献

Anderson, T. W. (1960) A modification of the sequential probability ratio tests to reduce the sample size. Ann. Math. Statists. 31 165-197.

Armitage, P. (1975) Sequential Medical Trials, Halsted, New York.

Arrow, K. J., Blackwell, D. and Girshick, M. A. (1949) Bayes and minimax solutions of sequential decision problems, Econometrica 17, 213-244.

Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. (1971) Great Expectations Houghton Mifflin, Boston.

Chow, Y. S., Robbins, H. and Teicher, H. (1965) Moments of randomly stopped sums, Ann. Math. Statists. 36 789-799.

Chow, Y. S. and Teicher, H. (1978) Probability Theory, Springer-Verlag, New York.

Cornfield, J. (1966) A Bayesian test of some classical hypotheses with applications to sequential clinical trials. JASA 61 577-594.

Daniels, H. E. (1982) Sequential tests constructed from images. Ann. Statists. 10 394 – 400.

Doob, J. L. (1949) A heuristic approach to the kolmogorov Smirnov theorems. Ann. Math. Statists. 20 393 – 403

Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, John-Wiley New York.

Ferebee, B. (1982) Tests with parabolic boundary for the drift of a Wiener process. Ann. Statists 10. 882 – 894.

Ferguson, T. S. (1967) Mathematical Statistics, Academic Press.

Kiefer, J. and Weiss, L. (1957) Some properties of generalized sequential probability ratio tests, Ann. Math. Statists 28 57 – 74.

Lai, T. L. and Siegmund, D. O. (1977). A non-linear renewal theory with applications to sequential analysis I. Ann Statists 5, 946 – 954.

Lai, T. L. and Siegmund, D. O. (1979) A non-linear renewal theory with applications to sequential analysis, II Ann. Statists 7, 60 – 76

Lehmann, E. L. (1959) Testing Statistical Hypothesis. John Wiley and Sons

McPherson, C. K. and Armitage, P. (1971) Repeated significance tests on accumulating data when the null hypothesis is not true. Jo Roy. Statists. Soc. Ser. A 134 15-26.

Robbins, H. (1952) Some aspects of the sequential design of experiments, Bull of American Math. Soc. 58, 527-535.

Robbins, H. (1970) Statistical methods related to the law of the iterated logarithm; Ann. Math. Statists. 41 1397-1409.

Robbins, H. and Siegmund, D. (1970) Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums, Ann. Math. Statists 41. 1410-1429.

Robbins, H. and Siegmund, D. (1973) Statistical tests of power one and the integral representation of solutions of certain partial differential equations. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 1, 93-120.

Schwarz, G. (1962) Asymptotic shapes for Bayes sequential testing regions. Ann. Math. Statists. 33 224-236.

Schwarz, G (1968) Asymptotic shapes for sequential testing of truncation parameters. Ann. Math. Statists, 39. 2038-2043

Siegmund, D (1977) Repeated significance tests for a normal mean, Biometrika 64, 177-189

Siegmund, D (1979) Corrected diffusion approximations in certain random walk problems, Adv. Appl. Probab. 11 701-719

Sobel, M. and Wald, A. (1949) A sequential decision procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of normal distribution. Ann. Math. Statists. 20. 502-522

Takahashi, H. and Woodroofe, M. (1981). Asymptotic expansions in non-linear renewal theory. Comm. Statist. A10 2113-2135.

Wald, A. (1947). Sequential Analysis, John Wiley & Sons. New York (also by Dover New York)

Wald, A. and Wolfowitz, J. (1948) Optimum character of the sequential probability ratio tests, Ann. Math. Statists. 19 326-339

Wallis, A. (1980) The statistical research group 1942-1945. JASA. 75 320-335.

Woodroofe, M. (1976 a) A renewal theorem for curved boundaries and moments of first passage times, Ann. Probab. 4. 67-81

Woodroofe, M. (1976 b) Frequentists properties of Bayesian sequential tests. Biometrika 63 101-110.

Woodroofe, M. and Takahashi, H. (1982) Asymptotic expansions for the error probabilities of some repeated significance tests. Ann Statists. 10 895-908.